Σωτήριος Δ. Χασάπης – Α.Μ. 94219

Καμπύλες γεμίζουσες το χώρο

Το παρόν κείμενο αποτελεί τη γραπτή έκδοση της παρουσίασης, η οποία έγινε στα πλαίσια του μαθήματος θέματα μαθηματικής ανάλυσης Ι κατά το χειμερινό εξάμηνο του πανεπιστημιακού έτους 1999- 2000. Το θέμα της κατά βάση είναι οι καμπύλες γεμίζουσες το χώρο, καθώς επίσης και ορισμένες από τις ιδιότητές τους.

Οι απαρχές τους βρίσκονται στα τέλη του 19^{ου} αιώνα και αποτελεί ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον πεδίο των μαθηματικών, τόσο από την αισθητικό - καλλιτεχνική υφή τους, η οποία είναι έμφυτη στον καθένα και η οποία καλλιεργείται με τη διαρκή τριβή με τα μαθηματικά. Υπό αυτήν την οπτική όταν το εξεταζόμενο αντικείμενο εμπεριέχει και σημαντικές μαθηματικές έννοιες - ιδιότητες, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως πόλος έλξης - άξονας παρουσίασης αυτών των εννοιών όσον αφορά τη διδακτική άποψη του θέματος. Πράγματι, οι καμπύλες γεμίζουσες το χώρο συνιστούν μία καλή αρχή για την παρουσίαση ορισμένων μαθηματικών αποτελεσμάτων, τα οποία χρησιμοποιούν, όπως θα φάνει στη συνέχεια. Εξάλλου, όπως έγραψε και ο Πολωνός μαθηματικός W. Sierpinski η μελέτη των καμπυλών γεμίσεως του χώρου είναι μία κατάσταση παρόμοια με το να βρίσκεται κανείς στο μεταίχμιο της μαθηματικής περιέργειας - δημιουργίας και της επίλυσης κάποιων υπαρχόντων ερωτημάτων.

Εφόσον, λοιπόν, από τότε που οι Έλληνες κατέστησαν τα μαθηματικά επιστήμη, η γένεση νέων εννοιών άπτεται, συνήθως, της λαμπερής φαιάς ουσίας - εγκεφαλικής διαύγειας ενός ή περισσοτέρων ατόμων, έτσι συμβαίνει και με τις καμπύλες γεμίζουσες το χώρο. Η αρχή έγινε με μία έκλαμψη του G. Cantor, όταν αυτός το 1878, σε ηλικία 33 ετών, διατύπωσε το εξής θεώρημα :“ Δύο πεπερασμένης διαστάσεως λείες πολλαπλότητες[1] έχουν την ίδια ισχύ - πληθικό αριθμό ”. Αυτό έπεται για παράδειγμα ότι το κλειστό διάστημα [0, 1] μπορεί να απεικονιστεί μέσω μίας 1-1 απεικόνισης επί του τετραγώνου $[0, 1]^2$. Επειδή, όμως κάθε λύση σε ένα πρόβλημα οδηγεί φυσιολογικά τους μαθηματικούς στη διατύπωση ενός νέου ερωτήματος, το οποίο αποτελεί επέκταση του ήδη επιλυμένου προβλήματος, γεγονός, το οποίο αποτελεί ακριβώς το στόχο ενός μαθηματικού, έτσι δημιουργήθηκε το ερώτημα κατά πόσο μία τέτοια απεικόνιση, όπως αυτή που περιγράφεται στο θεώρημα του Cantor, μπορεί να είναι και συνεχής.

Η απάντηση σε αυτό ερώτημα δόθηκε ένα χρόνο αργότερα το 1879, όταν ο σύγχρονος του Cantor μαθηματικός γερμανός E. Netto διατύπωσε το εξής θεώρημα :

“ Αν f είναι μία 1-1 και επί απεικόνιση από μία μ- διάστατη λεία πολλαπλότητα σε μία ν - διάστατη λεία πολλαπλότητα, με $\mu \neq \nu$, τότε η f είναι αναγκαστικά ασυνεχής ”,

το οποίο επιλύει το παραπάνω ερώτημα. Εντάξει, πότε όμως μία τέτοια απεικόνιση μπορεί να είναι συνεχής ; Δηλαδή, είναι δυνατόν να υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση με παρόμοιες ιδιότητες, αίροντας ίσως κάποιον από τους περιορισμούς στη δεδομένη απεικόνισή μας. Για παράδειγμα το 1-1; Με λίγα λόγια μήπως υπάρχει κάποια καμπύλη από το [0, 1] διάστημα στο τετράγωνο, η οποία να διέρχεται από κάθε σημείο του τετραγώνου; Πράγματι, ο Ιταλός μαθηματικός G. Peano(1858 – 1932) έδωσε απάντηση στο παραπάνω ερώτημα, κατασκευάζοντας το 1890 την πρώ-

1 Ν- διάστατη πολλαπλότητα ονομάζουμε ένα Hausdorff χώρο, του οποίου κάθε σημείο έχει μία ανοιχτή περιοχή, η οποία είναι ομοιομορφική με τον ν – διάστατο ανοιχτό δίσκο.

τη τέτοια καμπύλη, η οποία ονομάστηκε καμπύλη γεμίσεως του χώρου ή καμπύλη Peano. Στη συνέχεια ακολούθησαν και άλλοι μαθηματικοί, οι οποίοι κατασκεύασαν παρόμοιες καμπύλες, όπως ο Αμερικανός Moore το 1900, ο Lebesque το 1904, ο Polya το 1913 και άλλοι. Πάντως, η πρώτη διατριβή, η οποία αφορούσε τις καμπύλες γεμίζουσες το χώρο και ήταν κατανοητή συνεγγράφει από τον Πολωνό W. Sierpinski[2] το 1912.

Τα ερωτήματα – παραλλαγές και μετεξελίξεις των προηγουμένων συνεχίστηκαν να εμφανίζονται στην πάροδο του χρόνου, με αποτέλεσμα τη διατύπωση αρκετών αποτελεσμάτων, όπως για παράδειγμα το κριτήριο των S.Mazurkiewicz και H.Hahn : “ Ένα σύνολο είναι συνεχής εικόνα ενός ευθυγράμμου τμήματος, αν και μόνο, αν το σύνολο αυτό είναι συμπαγές, συνεκτικό και τοπικά συνεκτικό”, αποτέλεσμα, το οποίο ισχύει γενικά σε χώρους Hausdorff, όπως είναι και ο Ευκλείδειος χώρος .

Τελικά, το ενδιαφέρον για τις καμπύλες γεμίζουσες το χώρο αναθερμάνθηκε και επαναπροσδιορίστηκε τις τελευταίες δεκαετίες με την μελέτη των fractal συνόλων.

Αν και ήταν ο Peano εκείνος, ο οποίος κατασκεύασε την πρώτη καμπύλη γεμίσεως του χώρου, ακολούθησε ο Πρώσσος D. Hilbert(1862 – 1943), ο οποίος πρώτος έδωσε μία καλύτερη γεωμετρική εποπτεία και αναγνώρισε μία κατασκευαστική διαδικασία, με την οποία κατασκεύασε μία ολόκληρη κλάση τέτοιων καμπυλών, γι’ αυτό και περαιτέρω θα εστιάσουμε τη μελέτη μας στην καμπύλη του Hilbert.

Ο Hilbert προέβη, λοιπόν, το 1891 στη δημοσίευση της εξής παρακάτω αρχής:Ας θεωρήσουμε ένα διάστημα Ι = [0, 1], το οποίο δύναται να απεικονιστεί συνεχώς επί του τετραγώνου $\Pi = [0, 1]^2$. Στη συνέχεια χωρίζουμε το διάστημα Ι σε τέσσερα ίσα υποδιαστήματα και αφού χωρίσουμε το τετράγωνο Π σε τέσσερα ίσα υποτετράγωνα, τότε καθένα από τα υποδιαστήματα είναι εφικτό να απεικονιστεί συνεχώς, επί κάποιου από τα υποτετράγωνα. Έπειτα, καθένα από τα διαστήματα αυτά μπορούμε πάλι να το χωρίσουμε σε τέσσερα νέα υποδιαστήματα και ομοίως καθένα από τα τετράγωνα σε τέσσερα νέα υποτετράγωνα, οπότε και πάλι αντιστοιχίζουμε συνεχώς καθένα από τα νέα διαστήματα επί κάποιου από τα υποτετράγωνα, τα οποία βρίσκονται εντός του τετραγώνου, στο οποίο είχε αντιστοιχιστεί το αρχικό υποδιάστημα. Μπορούμε, λοιπόν, να επαναλάβουμε το ίδιο για όσα βήματα θέλουμε, με αποτέλεσμα στο ν – οστό βήμα το αρχικό τετράγωνο και το αρχικό διάστημα να έχουν χωριστεί σε $2^{2\nu}$ όμοια αντίγραφά τους.

Ο Hilbert απέδειξε ότι τα υποτετράγωνα αυτά κάθε βήματος δύνανται να διατάσσονται έτσι, ώστε διαδοχικά υποδιαστήματα κάθε βήματος να αντιστοιχίζονται σε διπλανά τετράγωνα, δηλαδή σε τετράγωνα, τα οποία να έχουν μεταξύ τους μία κοινή ακμή. Για παράδειγμα, αν ένα τετράγωνο αντιστοιχεί σε κάποιο διάστημα, τότε τα υποτετράγωνά του αντιστοιχούν σε διαδοχικά υποδιαστήματα του αρχικού διαστήματος (βλ . και σχήμα).

Θα ορίσουμε τώρα μία απεικόνιση από το Ι στο Π ως εξής :

Ορισμός : Θεωρώ ένα $\alpha \in I$, τότε αυτό θα καθορίζεται μονοσήμαντα από μία ακολουθία κλειστών διαστημάτων, τα οποία όμως θα προέρχονται από τις διαδοχικές διαιρέσεις (δηλ. έχω έναν κυβωτισμό), τα μήκη των οποίων θα τείνουν στο 0. Σ’ αυτήν την ακολουθία αντιστοιχεί – ανάλογα με την παραπάνω κατασκευαστική διαδικασία – μία ακολουθία κλειστών τετραγώνων, οι διαγώνιες των οποίων τείνουν σε ένα σημείο, το οποίο είναι επίσης μοναδικό και είναι η εικόνα του α : φ(α). Η καμπύλη φ(Ι) ονομάζεται <u>καμπύλη του Hilbert</u>.

2 Ο W. Sierpinski (1882 – 1969) μαζί με τους Mazurkewicz και Janiszewski είναι ανάμεσα στους μεγαλύτερους μαθηματικούς που έχει να επιδείξει η Πολωνική σχολή.

Παρατήρηση : Βέβαια, αν το α ανήκει στο άκρο κάποιου υποδιαστήματος, διαφορετικό από τα 0,1, τότε αυτό θα ανήκει σε δύο διαδοχικά υποδιαστήματα, αλλά αυτά απεικονίζονται σε διπλανά τετράγωνα, άρα η εικόνα θα παραμένει η ίδια.

Είναι όμως η καμπύλη του Hilbert αυτό, το οποίο αναζητούμε ; Πράγματι, ισχύει η εξής παρακάτω:

Πρόταση : Η απεικόνιση $\varphi : I \to \Pi$ είναι επί και συνεχής

Δηλαδή, η καμπύλη του Hilbert είναι επί του τετραγώνου, άρα <u>διέρχεται από κάθε σημείο του τετραγώνου</u>. Θα αποδείξουμε τώρα, την πρόταση:

Έστω ένα τυχόν σημείο $(\alpha,\beta) \in \Pi$. Αυτό βέβαια θα ανήκει σε μία ακολουθία κλειστών τετραγώνων (κυβωτισμένων), των οποίων οι διάμετροι θα τείνουν σε ένα σημείο. Σ' αυτήν την ακολουθία των τετραγώνων από την κατασκευή που κάναμε παραπάνω θα αντιστοιχεί μία ακολουθία διαδοχικών διαστημάτων κλειστών, των οποίων το μήκος θα τείνει αντίστοιχα στο 0 και έτσι ορίζεται ένα μοναδικό $\chi \in I$ έτσι , ώστε να ισχύει : $\varphi(\chi) = (\alpha, \beta)$.

Τώρα, για την περίπτωση, κατά την οποία το (α, β) μπορεί να ανήκει σε κάποια ακμή ενός τετραγώνου, τότε θα υπάρχουν δύο ακολουθίες τετραγώνων, διαφορετικές, οι οποίες να το περιέχουν και να μην αντιστοιχούν σε διαδοχικά διαστήματα, άρα ένα τέτοιο σημείο θα έχει δύο διαφορετικά πρότυπα στο I. Αυτό δεν πρέπει να μας εκπλήσσει, παρατηρώντας το θεώρημα του Netto, που διατυπώσαμε παραπάνω, διότι η απεικόνιση δεν μπορεί να είναι 1-1, επί και συνεχής (έχουμε άρει το 1-1, ώστε να κατασκευάσουμε μία επί και συνεχή απεικόνιση). Ας δούμε, όμως τώρα γιατί πράγματι η φ είναι συνεχής :

Θεωρώ τη ν – οστή επανάληψη της κατασκευαστικής διαδικασίας, κατά την οποία το I έχει χωριστεί σε $2^{2\nu}$ ίσα διαστήματα, μήκους το καθένα $1/ 2^{2\nu}$ και ας είναι χ_1 και χ_2 στο I, ώστε $|\chi_1 - \chi_2| <1/ 2^{\nu}$, τότε το διάστημα $[\chi_1, \chi_2]$ επικαλύπτεται με το πολύ δύο διαδοχικά υποδιαστήματα, οι εικόνες των οποίων μέσω της φ ανήκουν σε δύο το πολύ διπλανά τετράγωνα με μήκος πλευράς $1/ 2^{\nu}$, τα οποία σχηματίζουν ένα ορθογώνιου, του οποίου η διάμετρος είναι ίση με $\sqrt{5} / 2^{\nu}$, δηλαδή έχουμε την εξής σχέση : $\| \varphi(\chi_1) - \varphi(\chi_2) \| \leq \sqrt{5} / 2^{\nu} = 2^{\nu} \sqrt{5}\ 1/2^{2\nu}$, από την οποία σχέση έπεται ότι η φ είναι μία συνεχής απεικόνιση.

Ορισμός : Αν $\varphi : I \to E^{\nu}$, για $\nu >1$, συνεχής απεικόνιση με θετικό ν – διάστατο όγκο, τότε η εικόνα της φ(I) καλείται <u>καμπύλη γεμίσεως του χώρου ή καμπύλη γεμίζουσα το χώρο</u>.

Παρατήρηση – Πόρισμα : Η καμπύλη του Hilbert, όπως ορίστηκε προηγουμένως είναι μία καμπύλη γεμίσεως του χώρου.

Αν και στα προηγούμενα ορίσαμε την καμπύλη του Hilbert, υφίσταται ακόμα το πρόβλημα προσδιορισμού(αριθμητικά) των συντεταγμένων της εικόνας του τυχαίου στοιχείου του I στο τετράγωνο. Το 1954 πρώτος ο Emile Borel έδωσε μία αριθμητική περιγραφή της καμπύλης του Hilbert. Εδώ θα παρουσιάσουμε καταρχήν μία αναπαράσταση με μιγαδικούς αριθμούς, η ιδέα της οποία οφείλεται στον Βιεννέζο μαθηματικό W.Wunderlich (1910 ε. γεν.).

Παρατηρούμε, καταρχήν, ότι η καμπύλη άρχεται από το κάτω αριστερά σημείο του τετραγώνου, το οποίο είναι η αρχή των αξόνων και τελειώνει στο κάτω δεξί σημείο του τετραγώνου, το οποίο έχει συντεταγμένες (1, 0). Άρα τα τετράγωνα πρέπει να διατάσσονται με τέτοιο τρόπο, ώστε το σημείο εξόδου του ενός να ταυτίζεται με το σημείο εισόδου του επομένου. Και βλέπουμε στα σχήματα, πώς μπορεί να γίνει αυτό.

Εφαρμόζω, λοιπόν, στο αρχικό τετράγωνο τους εξής μετασχηματισμούς :

κάτω αριστερά (β) : Σμικραίνω κατά 2, περιστρέφω κατά 90^o θετικά και στη συνέχεια ανακλώ κατά τον φανταστικό άξονα, οπότε λαμβάνεται ο εξής μετασχηματισμός : $\rho_0(z) = ½\ z\ \iota$. Ομοίως, έχουμε :

πάνω αριστερά (β) : $\rho_1(z) = ½\ z + \iota/2$

πάνω δεξιά (β) : $\rho_2(z) = ½\ z + 1/2 + \iota/2$

κάτω δεξιά (β) : $\rho_3(z) = -\ ½\ z\ \iota + 1 + \iota/2$.

Μπορεί να ελέγξει κανείς ότι η ένωση των παραπάνω μετασχηματισμών αποτελεί μία συστολή με σταθερό σημείο το τετράγωνο Π.

Βιογραφικά στοιχεία

Netto Eugen (1848 - 1919) , συνομήλικος του Cantor, γεννήθηκε στο Halle και πέθανε στο Giessen, της Γερμανίας. Όπως και ο Cantor σπούδασε στο πανεπιστήμιο του Βερολίνου μεταξύ των ετών 1866 και 1870, όπου επηρεάστηκε ιδιαιτέρως από τους Leopold Kronecker και Karl Weierstrass. Το 1870 έλαβε το βαθμό του διδάκτορα υπό την καθοδήγηση του Weierstrass . Δίδαξε στο πανεπιστήμιο του Στρασβούργου από το 1879 έως το 1882, στο πανεπιστήμιο του Βερολίνου από το 1882 έως το 1888 και τελικά εγκαταστάθηκε στο πανεπιστήμιο του Giessen, όπου και δίδαξε μέχρι την απόσυρσή του το 1913. Οι μεγαλύτερές του μελέτες ήταν γύρω από τη θεωρία ομάδων και τη συνδυαστική.

Hilbert David (1862 - 1943) , γεννήθηκε στο Konigsberg , της ανατολικής Πρωσίας και πέθανε στο Gottingen. Σπούδασε στο πανεπιστήμιο του Konigsberg, εκτός από το δεύτερο εξάμηνο, το οποίο βρισκόταν στο πανεπιστήμιο της Heidelberg και έλαβε το βαθμό του διδάκτορα το 1884. O C.L.F. Lindemann, ο οποίος απέδειξε ότι ο π είναι υπερβατικός αριθμός το 1882, και κυρίως ο A. Hurwitz ήταν οι άνθρωποι που το επηρέασαν περισσότερο από όλους εκείνον τον καιρό. Μετά από ορισμένες μεταδιδακτορικές σπουδές στην Leipzig και στο Paris, επέστρεψε στο πανεπιστήμιο του Konigsberg το 1886. Το 1892 χρίστηκε ο διάδοχος του A. Hurwitz, ο οποίος έφυγε για τη Zurich, και το 1893 διαδέχτηκε το Lindemann . Το 1895 δέχτηκε μία πρόσκληση το πανεπιστήμιο του Gottingen, όπου και δίδαξε έως και την απόσυρσή του το 1930

Είχε μέγιστη συνεισφορά σε όλες τις περιοχές των μαθηματικών : Έως το 1893 εργάσθηκε στις αλγεβρικές μορφές, από το 1894 έως το 1899 στην αλγεβρική θεωρία αριθμών, από το 1899 έως το 1903 στη γεωμετρία και από το 1904 έως το 1909 στην ανάλυση, όπου και απέδειξε την ύπαρξη μίας λύσης στο πρόβλημα του Dirichlet, εισήγαγε το αναλλοίωτο ολοκλήρωμα στη θεωρία πεδίου του λογισμού των μεταβολών και με τη διατριβή του στις ολοκληρωτικές του εξισώσεις, άλλαξε την έννοια των γραμμικών συστημάτων. Η εισαγωγή του στους χώρους Hilbert έθεσε τα θεμέλια για το θεώρημα Riesz - Fisher στην ισομορφία και ισομετρία των l_2 και L_2 (0,1), και έδωσε την πλήρη απάντηση στην ερώτηση της σύγκλισης των σειρών Fourier. Έπειτα από το 1918 ανάλωσε το χρόνο και την ενέργειά του στη μελέτη των θεμελίων των μαθηματικών , όπου και υπερκεράστηκε πλήρως από τον Kurt Godel, ο οποίος έδειξε ότι ο αντικειμενικός σκοπός του Hilbert για την κατασκευή ενός πλήρους συστήματος ήταν ανέφικτη.

Moore Eliakim Hastings (1862 - 1932), γεννήθηκε στην Marietta, Ohio και πέθανε στο Chicago. Φοίτησε στο Yale υπό την καθοδήγηση του Hubert A. Newton και έλαβε το βαθμό του διδάκτορα το 1885. O Newton εντυπωσιάστηκε βαθιά από τις ικανότητες του Moore και τον πρότεινε για ένα χρόνο στα πανεπιστήμια του Gottingen και του Βερολίνου. Στο πρώτο συναντήθηκε με τον H. Weber, H.A. Schwarz και F. Klein, ενώ στο δεύτερο με τους K. Weierstrass, L. Kronecker. Αργότερα το 1899, έλαβε έναν τιμητικό τίτλο διδάκτορα από το πανεπιστήμιο του Gottingen. Εντάχθηκε στο διδακτικό σώμα του πανεπιστημίου Northeastern το 1886, ως εισηγητής. Έπειτα επέστρεψε στον πανεπιστήμιο του Yale, όπου και εργάστηκε ένα χρόνο ως καθηγητής. Το 1889 επέστρεψε στο πανεπιστήμιο του Northeastern ως βοηθός καθηγητής. Το 1891 προάχθηκε και το 1892 πήγε στο πανεπιστήμιο του Chicago ως καθηγητής και ως βασικός ερευνητής του τμήματος των μαθηματικών, όπου και έμεινε ως το 1931. Οι κυριότερές του συμβολές στα μαθηματικά είναι στη γεωμετρία, στην άλγεβρα, στη θεωρία ομάδων, στη θεωρία αριθμών και στην ανάλυση στις ολοκληρωτικές εξισώσεις. Δεν ήταν μόνο το βασικό όργανο στο σχηματισμό της διδασκαλίας των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο του Chicago, αλλά εκτός αυτού, είχε και μεγάλη επίδραση στην ανάπτυξη των αμερικανών μαθηματικών. Επίσης, ήταν σοβαρή η επίδρασή του στο σχηματισμό της τοπικής μαθηματικής εταιρείας της Νέας Υόρκης εντός της Μαθηματικής εταιρείας της Αμερικής (American Mathematical Society). Από το 1899 έως το 1907 ήταν ένας από τους εκδότες του Transactions of the American Mathematical Society.

Peano Giuseppe (1858 - 1932), γεννήθηκε στη Spinetta, της Ιταλίας και πέθανε στο Τορίνο. Ολοκλήρωσε τις σπουδές του στο πανεπιστήμιο του Τορίνο το 1880 και έγινε καθηγητής εκεί το 1890. Κράτησε αυτή τη θέση έως το θάνατό του. Είναι γνωστός για τη σημαντική δουλειά του στη συμβολική λογική, την αξιωματική μέθοδο, αλλά και για τις σημαντικές συμβολές του στη μαθηματική ανάλυση.

Ήταν ο Peano εκείνος ο οποίος εισήγαγε το σύμβολο $\in$ και το $\ni$. Ο B. Russell είχε πει κάποτε ότι έως ότου ανέλαβε ο Peano δεν μπορούσε να φανταστεί ποτέ ότι η συμβολική λογική θα μπορούσε να έχει ποτέ οποιαδήποτε χρήση στα μαθηματικά. Η σημαντικότερη και γνωστότερη συμβολή του Peano στην ανάλυση είναι πιθανόν η απόδειξή του της ύπαρξης μίας λύσης σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Στο έργο του “ Arithmitices principia ” έθεσε τα αξιώματα της αριθμητικής των φυσικών αριθμών με αριθμητικά και λογικά σύμβολα. Ομιλούμε ακόμα για τα αξιώματα του Peano, αν και ο ίδιος τα προσάπτει στον Dedekind.

Wunderlich Walter, γεννήθηκε το 1910 στη Βιέννη της Αυστρίας. Μελέτησε τα μαθηματικά στο πανεπιστήμιο της Βιέννης, υπό των Furtwangler, Mayrhofer, Wirtinger και στο πανεπιστήμιο τεχνολογίας της Βιέννης, όπου μελέτησε γεωμετρία υπό τους Eckhart, Krames, Kruppa. Έλαβε το βαθμό του διδάκτορα από το δεύτερο ίδρυμα το 1934 και έγινε πανεπιστημιακός το 1946. Οι συμβολές του στα μαθηματικά υφίστανται κυρίως σε 206 δημοσιεύσεις κυρίως πάνω σε δύο βασικές κατηγορίες : την κλασσική διαφορική γεωμετρία σε ευκλείδειους και μη ευκλείδειους χώρους και την εφαρμοσμένη γεωμετρία. Το 1970 υπήρξε επισκέπτης καθηγητής της κινηματικής στο πανεπιστήμιο Washington State. Από το 1954 προήγαγε τη χρήση των μετασχηματισμών ομοιότητας (Iterated Function Systems) για τη γένεση πουθενά διαφορισίμων καμπυλών και ειδικότερα καμπυλών γεμίσεως στο χώρο της μορφής του Hilbert.

Sierpinski Waclaw (1882 - 1969), γεννήθηκε στη Βαρσοβία της Πολωνίας. Το 1899 εισήχθη στο (Ρωσικό) πανεπιστήμιο της Βαρσοβίας. Αποφοίτησε το 1904. Μετά την επανάσταση του 1905 πήγε στην Κρακοβία, όπου στο πανεπιστήμιο της Κρακοβίας έλαβε το διδακτορικό του τίτλο το 1906. Το 1910 έγινε καθηγητής στο πανεπιστήμιο L’vou. Αυτόν τον καιρό επίσης εστίασε το ενδιαφέρον των σπουδών του από τη θεωρία αριθμών στην τοπολογία, ώσπου το 1950 επέστρεψε στη θεωρία αριθμών. Στις δημοσιεύσεις των τελευταίων είκοσι χρόνων της ζωής του η θεωρία αριθμών ήταν το επικρατών θέμα. Ήταν πολυγραφότατος επιστήμονας, αφού δημοσίευσε περί τα 700 άρθρα και βιβλία, από τα οποία περίπου 600 ήταν περί την τοπολογία. Το 1914 εισήχθη στους συγγραφείς του Τσάρου. Στη Μόσχα έγινε φίλος με τους Egorov και Lusin, οπότε άρχισε και μία πολυετής συνεργασία με τον τελευταίο. Επέστρεψε στο L’vou το 1918 και έγινε καθηγητής στο αναγεννημένο πανεπιστήμιο της Βαρσοβίας. Εκείνον τον καιρό μαζί με τον Mazurkiewicz και Janiszewski ίδρυσε τη νέα πολωνική σχολή των μαθηματικών, η οποία εστίασε κυρίως στη θεωρία συνόλων και τις εφαρμογές. Επίσης ίδρυσαν το Fundamenta Mathematicae, του οποίου την έκδοση ανέλαβαν αυτός και Mazurkiewicz μετά από το θάνατο του Janiszewski από γρίπη το

1920 και το οποίο διεύθυνε για αρκετές δεκαετίες. Κατά τη διάρκεια της κατοχής, όταν όλα τα ανώτατα ιδρύματα ήταν κλειστά, συνέχισε να διδάσκει κρυφά και με μεγάλο προσωπικό κίνδυνο στο διαμέρισμά του. Μετά τον πόλεμο ήταν ενεργός στην οργάνωση του μαθηματικού ινστιτούτου της Πολωνικής ακαδημίας επιστημών και παρέμεινε στην εκτελεστική του γραμματεία σχεδόν μέχρι το θάνατό του. Πολλές τιμές του αποδόθηκαν κατά τη διάρκεια της ζωής του. Μετά το θάνατό του, τιμητικά στη μνήμη του, το κεντρικό τμήμα του κτιρίου στο μαθηματικό ινστιτούτο της Πολωνικής ακαδημίας επιστημών, όπως επίσης και ένα βραβείο της Πολωνικής ακαδημίας επιστημών πήραν το όνομά του.

Knopp Konrad (1881 - 1957), γεννήθηκε στο Βερολίνο και πέθανε στην Annecy της Γαλλίας. Το 1901 εισχώρησε στο πανεπιστήμιο της Λοζάννης, αλλά μετά από ένα εξάμηνο, επέστρεψε στο Βερολίνο, όπου και ολοκλήρωσε τις σπουδές του. Έλαβε το διδακτορικό του από το πανεπιστήμιο του Βερολίνου το 1907, έχοντας γράψει μία διατριβή υπό την καθοδήγηση του E. Landau, όπου απέδειξε ότι μία συγκλίνουσα ακολουθία, η οποία έχει όριο κατά Holder, έχει επίσης και όριο κατά Cesaro. Το 1908 πήγε στην Ιαπωνία, μέσω των Ηνωμένων πολιτειών της Αμερικής, όπου δίδαξε στην εργατική σχολή του Nagasaki. Από εκεί ταξίδεψε στην Κίνα και την Ινδία. Με τον καιρό επέστρεψε στη Γερμανία το 1910, σε ηλικία 28 ετών είχε ήδη ολοκληρώσει μία πλήρη περιήγηση στη γη. Συνέχισε στην Κίνα, όπου δίδαξε στο Γερμανό-Κινεζικό πανεπιστήμιο του Tsingtau. Το 1911 επέστρεψε στο πανεπιστήμιο του Βερολίνου, όπου δίδαξε. Επίσης, δίδαξε και στη στρατιωτική ακαδημία. Το 1915 πήγε να διδάξει στο πανεπιστήμιο του Konigsberg και το 1926 πήγε στο πανεπιστήμιο του Tubingen, όπου και παρέμεινε έως την απόσυρσή του το 1950.

Ξεκινώντας με τη διδακτορική του διατριβή, ο Knopp αφιέρωσε αρκετό από το χρόνο του στη μελέτη των οριακών διαδικασιών. Εισήγαγε την έννοια του πυρήνα μίας ακολουθίας μιγαδικών αριθμών, ως την τομή εκείνων των κλειστών μιγαδικών υποσυνόλων, τα οποία περιέχουν σχεδόν όλα τα στοιχεία της ακολουθίας (αν ο πυρήνας αυτός συρρικνώνεται σε ένα σημείο, τότε η ακολουθία συγκλίνει). Επίσης μελέτησε εξαντλητικά την αθροιστική μέθοδο του Euler, ώστε τώρα η μέθοδος αυτή να αναφέρεται ως μέθοδος Euler-Knopp. Το εγχειρίδιό του στη θεωρία των συναρτήσεων μίας μιγαδικής μεταβλητής (το οποίο δημοσιεύτηκε σε δύο τόμους το 1918, ενώ αργότερα εκτάθηκε σε πέντε τόμους και μεταφράστηκε στα αγγλικά), είναι καλά γνωστό σε πολλές γενιές μαθηματικών. Επίσης κλασσικό είναι και το έργο του “Theory and applications of infinite series”. Επίσης, ήταν εκδότης και σε σχετικά περιοδικά, ενώ μετά το 1945 υπήρξε πρόεδρος της Γερμανικής μαθηματικής εταιρείας.

Polya Georg (1887 - 1985), γεννήθηκε στη Βουδαπέστη και πέθανε στο Palo Alto, California. Παρευρέθηκε στο πανεπιστήμιο της Βουδαπέστης, όπου μελέτησε νομική, γλώσσες και λογοτεχνία και, τελικά, μαθηματικά και φυσική, υπό τις φωτεινές προσωπικότητες των L. Eotvos και L. Fejer. Πέρασε τα χρόνια μεταξύ του 1910 και του 1911 στη Βιέννη και επέστρεψε στη Βουδαπέστη, ώστε να λάβει το διδακτορικό του από το πανεπιστήμιο της Βουδαπέστης το 1912. Ακολούθως, πέρασε δύο χρόνια στο πανεπιστήμιο του Gottingen, όπου ήρθε σε επαφή με τους F. Klein, D. Hilbert, H. Weyl, και R. Courant. Στο Παρίσι το 1914, συνάντησε τους E. Picard και J. Hadamard. Την ίδια χρονιά έγινε μέλος της διδακτικής κοινότητας του Eidgenossiche Technische Hochschule στη Ζυρίχη με την προτροπή του A. Hurwitz. Εκεί εκλέχθηκε ως καθηγητής το 1928 και παρέμεινε ως το 1940, όταν και μετανάστευσε στις Ηνωμένες πολιτείες της Αμερικής. Μετά από δύο χρόνια στο πανεπιστήμιο του Brown και από ένα μικρό πέρασμα από το Smith College, ανταποκρίθηκε σε μία κλήση του G.

Szego, ο οποίος ήταν η κεφαλή του τμήματος μαθηματικών του πανεπιστημίου του Stanford. Δίδαξε εκεί έως την απόσυρσή του το 1953. Οι συμβολές του στη μαθηματική εκπαίδευση κατά την πολυετή απόσυρσή του υπήρξαν μυθικές. Κατά την πανεπιστημιακή του σταδιοδρομία συνεργάστηκε με πολλούς μαθηματικούς, όπως οι G. Szego, G. Julia, I. Schur, M. Fakete, A. Hurwitz, G.H. Hardy, J.E. Littlewood, N. Wiener, I.J. Schoenberg, καθώς επίσης και με πολλούς άλλους. Μεταξύ των πολλών περιοχών στις οποίες συνέβαλλε υπήρξε και η θεωρία συναρτήσεων μίας μιγαδικής μεταβλητής, η θεωρία πιθανοτήτων, οι μαθηματικές μέθοδοι και η συνδυαστική.

Lebesgue, Henri Leon (1875 - 1941), γεννήθηκε στο Beauvais και πέθανε στο Παρίσι. Παρευρέθηκε στην Ecole Normal Superieur το διάστημα 1894 - 1897, για να πιστοποιηθεί ως καθηγητής των μαθηματικών επιστημών. Αφού δίδαξε στο λύκειο της Nancy από το 1899 έως το 1902, έλαβε το διδακτορικό του τίτλο το 1902 με τη διατριβή του “Integrale, longeur, aire”, η οποία δημοσιεύτηκε στο “ Annali di mathematica pura et applicata ” και υπήρξε προπομπός της σύγχρονης θεωρίας ολοκλήρωσης. Το ίδιο όμως προκάλεσε μία δυσάρεστη αμφισβήτηση, όσον αφορά το δάσκαλό του E. Borel, ο οποίος ισχυρίστηκε ότι ο Lebesgue δεν είχε ανακαλύψει κάτι νέο και ότι η οικογένεια των Borel συνόλων είναι ταυτόσημη με την οικογένεια των μετρησίμων κατά Lebesgue συνόλων. Αυτή η ερώτηση δεν επιλύθηκε έως το 1917, όταν ο M. Souslin κατασκεύασε αυτό που ονόμασε αναλυτικά σύνολα, τα οποία ήταν μετρήσιμα κατά Lebesgue, αλλά δεν ήταν Borel σύνολα. Ο Lebesgue, ο οποίος έχει 165 δημοσιεύσεις στο ενεργητικό του, είχε ήδη δημοσιεύσει 82 βιβλία και άρθρα ως το 1920, χρόνο κατά τον οποίο εκλέχτηκε καθηγητής της εφαρμοσμένης ανάλυσης στη διδακτική κοινότητα των επιστημών του Παρισιού. Το 1921 έγινε καθηγητής των μαθηματικών στο κολέγιο της Γαλλίας. Το 1922 εκλέχτηκε στην ακαδημία των επιστημών στο Παρίσι. Οι A. Denjoy, L. Felix, P. Montel χαρακτήρισαν τεράστια την πρόοδό του, όταν εισήγαγε το χώρο των μετρησίμων συναρτήσεων.

Hahn Hans (1879 - 1934), γεννήθηκε και πέθανε στη Βιέννη. Το 1898 βρέθηκε στο πανεπιστήμιο της Βιέννης, για να μελετήσει νομικές επιστήμες. Έπειτα από ένα χρόνο άλλαξε σε μαθηματικά στο πανεπιστήμιο του Στρασβούργου. Για το φθινοπωρινό εξάμηνο του 1900 -1901 πήγε στο πανεπιστήμιο του Μονάχου και επέστρεψε στο πανεπιστήμιο της Βιέννης την άνοιξη του 1901. Παρέμεινε εκεί και έλαβε το βαθμό του διδάκτορα τον Ιούλιο του 1902. Έγραψε τη διατριβή του υπό την καθοδήγηση του Gustav, Ritter von Escherich. Έμεινε άλλον ένα χρόνο στο πανεπιστήμιο της Βιέννης, για να παρακολουθήσει διαλέξεις των Hilbert και Minkowski, αλλά και να συμμετάσχει σε σεμινάρια των Hilbert, Klein και Minkowski . Έπειτα από την υποχρεωτική ανάθεση εργασίας στο πανεπιστήμιο της Βιέννης από το 1905 έως το 1909, εκλέχθηκε καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Czernowitz στην Bukowina, το οποίο ήταν τότε μέρος της Αυστρο - ουγγρικής αυτοκρατορίας. Συμμετέχοντας στον πρώτο παγκόσμιο πόλεμο, τραυματίσθηκε σοβαρά και παρασημοφορήθηκε για γενναιότητα. Το 1916 πήγε στο πανεπιστήμιο της Βόννης και επέστρεψε στο πανεπιστήμιο της Βιέννης το 1921. Έμεινε εκεί έως τον πρόωρο θάνατό του από καρκίνο. Ο Hahn είχε αρκετές πρωτοποριακές συμβολές στην ανάπτυξη του προβλήματος του Lagrange στο λογισμό των μεταβολών. Εισήγαγε τον όρο “ anormal extremals ”, μία διάκριση, η οποία ήδη είχε αναγνωριστεί από τους Mayer και von Escherich σε παρόμοια προηγούμενη εργασία και ήταν ο πρώτος, ο οποίος εισήγαγε τη συνθήκη Weierstrass για το πρόβλημα του Lagrange. Επίσης μοιράζεται με τον Banach το θεώρημα επέκτασης ενός γραμμικού συναρτησοειδούς, από μία γραμμική πολλαπλότητα ενός νορμαρισμένου γραμμικού χώρου. Στη θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων γενίκευσε παραγοντικό θεώρημα Weierstrass στις αναλυτικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Επίσης είχε σημαντικές συμβολές στην τοπολογία και στη θεωρία των συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής.

Mazurkiewicz, Stefan (1888 - 1945), γεννήθηκε στη Βαρσοβία και πέθανε κοντά σ' αυτήν. Παρακολούθησε στα πανεπιστήμια της Κρακοβίας, του Μονάχου, του Gottingen και του L'vou και έλαβε το διδακτορικό του τίτλο από το τελευταίο, υπό την καθοδήγηση του Sierpinski το 1913, γράφοντας μία διατριβή στις καμπύλες γεμίσεως στο χώρο. Το 1915 έγινε καθηγητής των μαθηματικών νεοϊδρυθέν πανεπιστήμιο της Βαρσοβίας στην Πολωνία. Υπήρξε ένας από τους σπουδαιότερους εκπροσώπους της πολωνικής επιστήμης. Υπήρξε πρύτανης του πανεπιστημίου της Βαρσοβίας για εννιά χρόνια. Από το 1935 υπηρέτησε ως γενικός γραμματέας της επιστημονικής κοινότητας της Βαρσοβίας. Μαζί με τον Sierpinski υπήρξε βασικός εκδότης του Fundamenta Mathimaticae, που αυτός, ο Sierpinski και ο Janiszewski ίδρυσαν το 1920 (ο Janiszewski πέθανε μετά από λίγο). Οι συμβολές του στα μαθηματικά κινούνται κυρίως στις περιοχές της τοπολογίας, της πραγματικής ανάλυσης, της θεωρίας των αναλυτικών συναρτήσεων και τη θεωρία πιθανοτήτων. Από το 1940 έως το 1944, όταν τα πολωνικά ανώτατα εκπαιδευτικά ιδρύματα έκλεισαν υπό την πίεση των κατοχικών δυνάμεων, αυτός, μαζί με τον Sierpinski και άλλους συνέχισε να διδάσκει με μεγάλο κίνδυνο για την ασφάλειά τους, στο " κρυφό πανεπιστήμιο " της Πολωνίας. Όπως και ο Hahn πέθανε άκαιρα, σε ηλικία 57, σε μία εποχή, κατά την οποία ήταν απορροφημένος από φιλόδοξα σχέδια για την αναγέννηση της πολωνικής επιστήμης.

Schoenberg, Isaac J. (1903 - 1990), γεννήθηκε στο Galatz της Ρουμανίας και πέθανε στο Madison του Winsconsin. Φοίτησε στα πανεπιστήμια του Jassy, του Gottingen και του Βερολίνου και έλαβε το διδακτορικό του τίτλο από το πρώτο το 1926. Αφού πήγε στην Αμερική το 1930 έγινε μέλος στα πανεπιστήμια του Σικάγο, του Harvard και του ινστιτούτου ανωτάτων σπουδών στο Princeton. Από το 1935 και μετά είχε θέση στις διδακτικές κοινότητες των Swarthmore College, Colby College και του πανεπιστημίου της Πενσυλβάνια, όπου και έγινε καθηγητής το 1948 και του πανεπιστημίου του Winsconsin από το οποίο αποσύρθηκε το 1973. Από το 1945 έως το 1946 ήταν ηγήτορας του τομέα Punched Card του υπολογιστικού κλάδου του εργαστηρίου βαλλιστικών ερευνών του Aberdeen. Από το 1965 έως και την απόσυρσή του υπήρξε ταυτόχρονα διορισμένος στο πανεπιστήμιο του Winsconsin και του κέντρου στρατιωτικών ερευνών στο Madison.

Osgood, William Fogg (1864 - 1943), γεννήθηκε στη Βοστόνη και πέθανε στο Μπέλμοντ της Μασαχουσέτης. Φοίτησε στο Harvard υπό τους B.O. Peirce και F.N. Cole και αποφοίτησε δεύτερος στην τάξη του το 1887. Τον ίδιο χρόνο πήγε στο πανεπιστήμιο του Gottingen, όπου φοίτησε υπό τον Felix Klein και από εκεί στο πανεπιστήμιο του Erlangen, όπου και έλαβε το διδακτορικό του τίτλο το 1889. Επέστρεψε στο Harvard το 1890 και παρέμεινε στη διδακτική κοινότητα έως το 1933. Μέχρι το 1891, όταν ο Maxim Bocher ήλθε στο τμήμα, ο Osgood ήταν ο μόνος μαθηματικός με ερευνητικούς στόχους στην καθηγητική κοινότητα του Harvard. Μετά την απόσυρσή του το 1933, δίδαξε για δύο χρόνια στο Εθνικό πανεπιστήμιο του Peiping. Είναι γνωστός για τις συμβολές του στη θεωρία συναρτήσεων μίας μιγαδικής μεταβλητής, στις διαφορικές εξισώσεις και στο λογισμό των μεταβολών.

Βιβλιογραφία :

Βασική

1. Sagan Hans, Space filling curves, Springer – Verlag 1993
2. Ohno, O., Ohiyama K., A catalog of self-similar space – filling curves, J.Recreational Mathematics, 23, 1991
3. Δάλλα – Ευαγγελάτου Λ., Σημειώσεις γεωμετρίας των φράκταλ, 1999.